

Gymnasium Hohenlimburg

Stufe Q1 2020/2021

Facharbeit im Leistungskurs Mathematik

**Die Erweiterung der Welt der reellen
Zahlen um die komplexen Zahlen**

-

**Eine fachliche Analyse mit dem Ziel der
Erstellung eines Lernvideos**

Von Lena Raffke

Kursleiter: Frau Wasser

Bearbeitungszeit: 17.12.2020 bis 26.02.2021

Abgabetermin: 26.02.2021

Inhaltsverzeichnis:

1. Einleitung.....	3
2. Was sind komplexe Zahlen?	3
2.1. Die Imaginäre Einheit	4
3. Die konjugiert komplexe Zahl.....	4
4. Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene	4
4.1. Polarkoordinaten.....	5
5. Rechnen mit komplexen Zahlen	5
5.1. Addition	5
5.2. Subtraktion	6
5.3. Multiplikation	6
5.4. Division	7
5.5. Potenzen.....	8
5.6. Quadrieren von komplexen Zahlen	8
6. Komplexe Polynome.....	8
6.1. Beispiel: Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$	9
7. Der Abstand zum Nullpunkt	9
8. Anwendung von komplexen Zahlen	10
9. Fazit	10
10. Erklärung	12
X. Literaturverzeichnis.....	12

1. Einleitung

Diese Facharbeit thematisiert das Thema komplexe Zahlen im Hinblick auf die Frage „Was sind komplexe Zahlen und wie kann man mit ihnen rechnen?“. Da dieses Thema sehr umfangreich ist, werde ich mich auf eine allgemeine Einleitung in die Welt der komplexen Zahlen, die Darstellung und das Rechnen mit komplexen Zahlen beschränken und nur einen kurzen Einblick in die Anwendung geben und dabei flüchtig auf die Quantenmechanik eingehen. Somit lässt sich diese Facharbeit grob in vier Teile einteilen. Als erstes eine Einleitung in das Thema komplexe Zahlen, basierend darauf, was diese überhaupt sind, die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen sowie das Rechnen mit komplexen Zahlen und die Anwendung. Ziel ist es außerdem, ein Lernvideo zu erstellen, bei dem zu Beginn auch nochmal erklärt werden soll, was komplexe Zahlen sind und anschließend auch das Rechnen mit komplexen Zahlen behandelt wird.

Ich habe mich für das Thema komplexe Zahlen entschieden, weil ich wahrscheinlich nach der Schule Mathematik studieren möchte und dieses Thema unter anderem während des Studiums thematisiert wird. Des Weiteren wurde uns Schülern im Unterricht immer beigebracht, dass man zum Beispiel keine Wurzel aus -1 ziehen kann, jedoch ist dies nur bei den reellen Zahlen nicht möglich, sodass es mich interessiert hat, inwiefern dies doch im Bereich des Möglichen ist.

2. Was sind komplexe Zahlen?

In der Ebene der reellen Zahlen existieren für bestimmte Gleichungen keine Lösungen, sowie zum Beispiel für die Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Die Ebene der komplexen Zahlen ermöglicht dies aber. So entsteht bei der Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ die imaginäre Einheit i . Die komplexen Zahlen bestehen aus einem Real- und einem Imaginärteil. Wenn man also eine reelle Zahl a und eine imaginäre Zahl bi addiert, so erhält man eine komplexe Zahl $a+bi$ ¹, wobei a und b reelle Zahlen sind. Man schreibt also $Re(z) = a$ und $Im(z) = b$.² Wenn der Imaginärteil b einer komplexen Zahl 0 ist, so

¹ Vgl. Kusch, Lothar: Kusch Mathematik Arithmetik und Algebra 1; 16. Auflage Berlin 2013, S. 448

² Vgl. Strackenbrock, Birgit: Duden Rechnen und Mathematik; Mannheim 2000, S. 325

ist diese Zahl eine reelle Zahl, da i mit 0 multipliziert 0 ergibt und somit nur noch aus a , einer reellen Zahl, besteht. Die komplexen Zahlen umfassen zwar die reellen Zahlen, aber die reellen Zahlen nicht die komplexen Zahlen.

2.1 Die Imaginäre Einheit

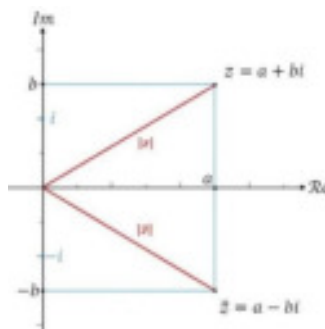
„Die imaginäre Einheit i ist eine Zahl, die quadriert -1 ergibt“.³ Dies beschreibt die Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$, wobei nicht nur i^2 , sondern auch $(-i)^2 = -1$ ergibt. „Die imaginäre Zahl bi ist ein Produkt aus einer reellen Zahl b und einer imaginären Einheit i “.⁴

3. Die konjugiert komplexe Zahl

Die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} := a - bi$ ⁵ ist die Spiegelung an der x-Achse zu einer komplexen Zahl mit $z = a + bi$ ⁶, wobei sich nur der Imaginärteil durch das Vorzeichen unterscheidet. Man braucht die konjugiert komplexe Zahl zum Beispiel für die Division zweier komplexer Zahlen, da durch die Multiplikation einer komplexen Zahl und der dazugehörigen konjugiert komplexen Zahl eine reelle Zahl entsteht, welche bei der Division im Nenner stehen muss.

4. Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene

Die Gaußsche Zahlenebene wird auch komplexe Zahlenebene genannt und wurde nach dem Mathematiker C.F. Gauß (1777-1855) benannt.⁷ Die komplexen Zahlen können im Gegensatz zu reellen Zahlen nicht auf einer Geraden liegen, so braucht es für die Darstellung eine Ebene. Man kann komplexe Zahlen in einem Koordinatensystem abbilden, wo sie jeweils in einem Punkt (a,b) dargestellt werden, wenn sie die Form



(Abbildung von <https://www.mathe-online.at/lernpfade/Lernpfad805/?kapitel=3>)

³ Kusch, Lothar (2013) S. 446

⁴ Kusch, Lothar (2013) S. 447

⁵ Die konjugiert komplexe Zahl ist durch einen waagerechten Strich über dem z gekennzeichnet

⁶ Vgl. Fritzsche, Klaus: Tutorium Mathematik für Einsteiger; Wuppertal 2016; S.302

⁷ Vgl. Strackenbrock, Birgit (2000) Duden S. 325

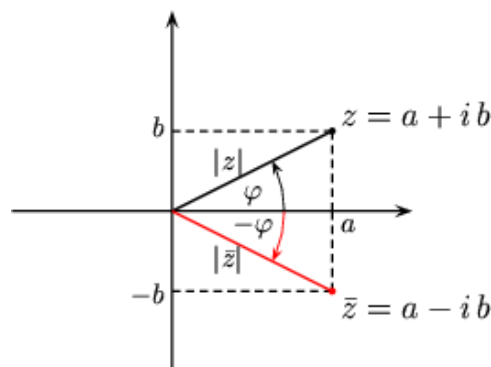
$z = a + ib$ besitzen, wie es auch die Abbildung davor zeigt. Dabei gibt die waagerechte Achse die reellen Zahlen an und die senkrechte Achse die rein imaginären, wobei der Realteil 0 ist.⁸

4.1 Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten geben die Entfernung r in Beziehung mit dem Winkel φ zum Koordinatenursprung an der positiven reellen Achse an. Dabei ist r der Betrag und φ das Argument einer komplexen Zahl z .

Es gilt: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ für $z = a + b \cdot i$.⁹

Dabei wird der Realteil einer komplexen Zahl zu $a = r \times \cos(\varphi)$ und der Imaginärteil zu $b = r \times \sin(\varphi)$, somit gilt $z = r \times (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.¹⁰



(Abbildung von <http://mathe-online.fernuni-hagen.de/MIB/HTML/node38.thml>)

5. Rechnen mit komplexen Zahlen

5.1 Addition

Bei der Addition zweier komplexer Zahlen können die Realteile und die Imaginärteile nicht weiter zusammengefasst werden, sodass man jeweils die Realteile und die Imaginärteile getrennt voneinander addiert.

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + i \times (b + d)$$

Bsp.:

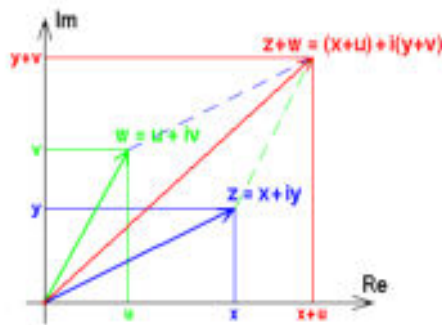
$$(2 - 6i) + (2 - 3i) = 2 - 6i + 2 - 3i = 2 + 2 - 6i - 3i = 4 - 9i$$

⁸ Vgl. Königsberger, Konrad: Königsberger Analysis; 6. Auflage 2004 S. 22

⁹ Vgl. Strackenbrock, Birgit (2000) Duden S. 325

¹⁰ Vgl. Strackenbrock, Birgit (2000) Duden S. 325

Durch die Gaußsche Zahlenebene ist nun auch die geometrische Darstellung der Addition von komplexen Zahlen möglich, welche ähnlich wie die Addition von Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ funktioniert.¹¹ Addiert man nun die beiden komplexen Zahlen z und w , so „stellt die Abbildung $z \mapsto z + w$ eine Translation um w dar“¹², wobei eine Seite des Dreiecks nicht die Summe der Länge der anderen beiden Seiten überschreiten kann.



(Abbildung von <https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/#821d>)

5.2 Subtraktion

Bei der Subtraktion zweier komplexer Zahlen können die Realteile und die Imaginärteile nicht weiter zusammengefasst werden, sodass man jeweils die Realteile und die Imaginärteile getrennt voneinander subtrahiert.

$$z_1 + z_2 = (a + bi) - (c + di) = a - c + i \times (b - d)$$

Bsp.:

$$(5 - i) - (4 - 2i) = 5 - i - 4 + 2i = 5 - 4 - i + 2i = 1 + i$$

5.3 Multiplikation

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen funktioniert wie die Multiplikation von reellen Zahlen, nur das beachtet werden muss, dass $i^2 = -1$ ist, sodass $ai \times bi = -ab$ ergibt. Schließlich besitzt das Produkt wieder die Form $a + bi$ einer komplexen Zahl.

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + i \times (ad + bc)$$

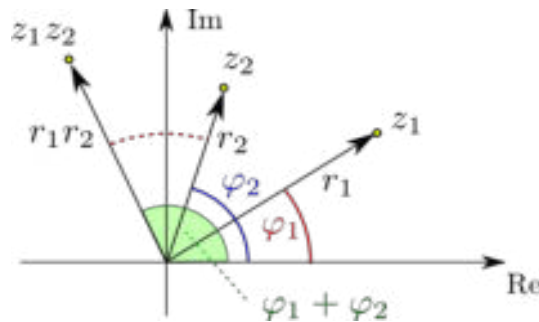
¹¹ Vgl. Strackenbrock, Birgit (2000) Duden S. 325

¹² Königsberger, Konrad (2004) S. 23

Bsp.:

$$(11 + 5i) \times (6 + 7i) = 66 + 77i + 30i - 35 = 66 - 35 + 77i + 30i = 31 + 107i$$

Mit den Polarkoordinaten ist nun auch die geometrische Multiplikation von komplexen Zahlen möglich. Man multipliziert zwei komplexe Zahlen, indem man jeweils ihre Beträge multipliziert und schließlich ihre Argumente addiert. So ergibt sich aus $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ gleich $z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$.¹³



(Abbildung von <https://www.mathe-online.at/mathint/komplex/i.html>)

5.4 Division

Die Division zweier komplexer Zahlen funktioniert wie die Division von reellen Zahlen. Wenn aber im Nenner eine imaginäre Zahl ist, so muss der gesamte Bruch mit i erweitert werden, sodass im Nenner nur noch eine reelle Zahl steht. Wenn aber im Nenner eine komplexe Zahl steht, muss der gesamte Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl erweitert werden, damit sich im Nenner wieder eine reelle Zahl befindet.¹⁴

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi) \times (c-di)}{(c+di) \times (c-di)} = \frac{ac+bd}{(c \times c) \times (d \times d)} + \frac{bc-ad}{(c \times c) \times (d \times d)} i$$

Bsp.:

$$1. \frac{5+10i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{10i}{2} = 2,5 + 5i$$

$$2. \frac{6+9i}{3i} = \frac{(6+9i)i}{3i \times i} = \frac{6i-9}{-3} = 3 - 2i$$

¹³ Vgl. Strackenbrock, Birgit (2000) Duden S. 326

¹⁴ Vgl. Kusch, Lothar (2013) S. 453

$$3. \frac{9+2i}{5+4i} = \frac{(9+2i) \times (5-4i)}{(5+4i) \times (5-4i)} = \frac{45+8-36i+10i}{25+16-20i+20i} = \frac{53-26i}{41} = \frac{53}{41} - \frac{26}{41}i = 1 \frac{12}{41} - \frac{26}{41}i$$

5.5 Potenzen

Beim potenzieren der imaginären Einheit i mit natürlichen Exponenten sind Regelmäßigkeiten zu erkennen. Beginnend mit $i^0 = 1$, da bei reellen, sowie auch bei imaginären Zahlen $a^0 = 1$ gilt. Daraufhin folgt $i^1 = i$, $i^2 = -1$ und anschließend $i^3 = -i$. Danach kommt $i^4 = 1$ und somit fängt genau diese Reihenfolge von vorne an. Man erhält also beginnend bei i^0 die Ergebnisse $1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i$, usw. Allgemein formuliert gilt also $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ und $i^{4n+3} = -i$.¹⁵

Diese Regelmäßigkeit tritt aber nicht nur bei positiven Exponenten auf, sondern auch bei negativen, sodass beginnend mit i^{-1} die Ergebnisse $-i, -1, i, 1, -i, -1, i, 1$, usw. lauten.¹⁶

5.6 Quadrieren von komplexen Zahlen

Beim quadrieren von komplexen Zahlen werden im Gegensatz zu den reellen Zahlen die binomischen Formeln angewendet. Wenn man also eine komplexe Zahl $z = a + bi$ quadriert gilt $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$.

6. Komplexe Polynome

„Ein komplexes Polynom $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$, ist eigentlich eine Funktion $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ “¹⁷, wobei das Ziel aber darin liegt, die Nullstellen zu bestimmen, also die Gleichung $p(z) = 0$ zu lösen. Der Satz über Nullstellen und Linearfaktoren sagt aus, dass es ein Polynom vom Grad $n - 1$ gibt, wenn ein Polynom $p(z)$ vom Grad n , $p(c) = 0$ ist, wodurch $p(z) = (z - c) \times q(z)$ gilt.¹⁸

„Sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad n . Eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ heißt k -fache Nullstelle von $p(z)$, falls es ein Polynom $q(z)$ vom Grad $n - k$ gibt, so dass gilt: $p(z) = (z - c)^k \times q(z)$ und $q(c) \neq 0$. Man nennt k auch Vielfältigkeit der Nullstelle.“¹⁹

¹⁵ Vgl. Kusch, Lothar (2013) S. 447

¹⁶ Vgl. Kusch, Lothar (2013) S. 447

¹⁷ Fritzsche, Klaus (2016) S. 306

¹⁸ Vgl. Fritzsche, Klaus (2016) S. 307

¹⁹ Fritzsche, Klaus (2016) S. 307

6.1 Beispiel: Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Mithilfe der komplexen Zahlen lassen sich alle quadratischen Gleichungen der Form $p(z) = az^2 + bz + c$ lösen, sodass quadratische Polynome zwei verschiedene Nullstellen besitzen oder, wenn dies nicht der Fall ist, eine doppelte Nullstelle haben. Auch wenn es bei komplexen Zahlen keine positiven Zahlen gibt, kann man aus allen komplexen Zahlen die Wurzel ziehen. So kommt es nicht wie im Reellen auf die Diskriminante $\Delta := b^2 - 4ac$ an, wo $\Delta > 0$ sein muss, damit die quadratische Gleichung eine Lösung hat. Daraus folgt, dass jede quadratische Lösung zwei komplexe Lösung besitzt, bis auf die Ausnahme $\Delta = 0$, denn somit hat die zu lösende Gleichung eine doppelte Nullstelle.²⁰

7. Der Abstand zum Nullpunkt

Im Gegensatz zu den reellen Zahlen kann man die komplexen Zahlen nicht miteinander vergleichen und feststellen, welche Zahl größer beziehungsweise kleiner ist. Stattdessen kann man aber vergleichen, welche komplexe Zahl den geringeren Abstand zum Nullpunkt hat. Dies kann man herausfinden, indem man den Betrag einer komplexen Zahl berechnet, welcher durch $|z|$ beschrieben wird. Man kann $|z|$ von einer komplexen Zahl $z = a + bi$ berechnen, indem man die Quadratwurzel aus $a^2 + b^2$ zieht. Man kann also differenzieren, dass in dem Fall von $|z_1| > |z_2|$ die komplexe Zahl z_2 näher am Nullpunkt liegt, als die komplexe Zahl z_1 . Der Winkel φ ist das Argument, was aus der der Verbindungsstrecke mit der „positiven Richtung der waagerechten Achse“²¹ und einem Punkt P gebildet wird. Eine komplexe Zahl und ihre dazugehörige konjugiert komplexe Zahl liegen immer gleich weit vom Nullpunkt entfernt und liegen auf einem Kreis, dessen Summe der Argumente zusammen 360° ergibt, was sich aus $\varphi_1 + \varphi_2$ ergibt. Es kann aber nicht nur eine komplexe Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl auf einem Kreis um den Nullpunkt liegen, sondern auch alle komplexen Zahlen, die den gleichen Abstand c vom Nullpunkt besitzen. Somit liegen alle komplexen Zahlen mit einer Entfernung c vom Nullpunkt, auf einem Kreis mit dem Radius c . Dementsprechend liegen zum Beispiel die Zahlen $5, 3 + 4i, -5, 4 + 3i$ und einige weitere Zahlen auf einem Einheitskreis mit dem Radius von 5 um den Nullpunkt. Der Kreis mit dem Radius von 5 kann auch durch die Gleichung $a^2 + b^2 = 25$ beschrieben werden, da der Radius des Kreises, also in diesem Falle 5,

²⁰ Vgl. Fritzsche, Klaus (2016) S. 306

²¹ Kusch, Lothar (2013) S. 449

quadriert wird. Um nun also weitere Zahlen zu finden, die den gleichen Abstand zum Nullpunkt haben, also auf dem dazugehörigen Kreis liegen, wählt man a als freie Variable, wofür man beliebige Zahlen einsetzen kann und löst die Gleichung dann nach b auf, wobei a aber nicht größer als der Radius des Kreises sein darf, da der Abstand sonst zu groß wäre.²²

8. Anwendung von komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen werden zum Beispiel in der Physik und Technik in Gebrauch genommen und fungieren dort vor allem in Bereichen der Quantenmechanik, sowie in der Schwingungslehre und der Elektrotechnik. Aber auch in der Mathematik finden die komplexen Zahlen ihren Nutzen, wie beispielsweise für die Lösung von quadratischen oder auch biquadratischen Gleichungen.²³

„Die Grundlage der Quantenmechanik ist die Beschreibung des Verhaltens von Wellenfunktionen.“²⁴ So stellte sich auch schon früh heraus, dass es, um die Größen der Realität zufolge darstellen zu können, komplexe Zahlen braucht. In der Quantenmechanik haben die Wellenfunktionen in jedem Punkt des Raumes einen komplexen Zahlenwert. Zur Visualisierung müssen Farben verwendet werden, weil so, mit einem einzigen Farbpunkt ein zweidimensionaler (komplexer) Datenwert dargestellt werden kann, wobei bei der Darstellung in einem Funktionsgraphen ein fünfdimensionaler Raum nötig wäre.²⁵

9. Fazit

In der vorliegenden Facharbeit sollte das Thema komplexe Zahlen fachlich analysiert werden und so habe ich mir die Frage gestellt, was komplexe Zahlen sind und mich damit beschäftigt, wie man mit ihnen rechnen kann.

²² Vgl. Kusch, Lothar (2013) S. 449 und 450

²³ Vgl. Kusch, Lothar (2013) S. 454

²⁴ Wunderlich-Pfeiffer, Frank: „Quantenmechanik ist wahrscheinlich nicht hyperkomplex“, <https://www.golem.de/news/quantenphysik-quantenmechanik-ist-wahrscheinlich-nicht-hyperkomplex-1705-127607.html> (veröffentlicht am 4. Mai 2017 um 10:36; aufgerufen am 13. Februar 2021 um 18:25 Uhr)

²⁵ Vgl. Thaller, Bernd: „Komplexe Zahlen – ein mathematischer Ausflug“, <https://vqm.uni-graz.at/german/complex1.html> (veröffentlicht am 15. Dezember 2000; aufgerufen am 13. Februar 2021 um 18 Uhr)

Dabei bin ich zu dem Ergebnis gekommen, dass die komplexen Zahlen eine Erweiterung der reellen Zahlen sind und jede Gleichung mindestens eine Lösung enthält. Die komplexen Zahlen bestehen aus einem Realteil a und einen Imaginärteil b , wobei das b mit der imaginäre Einheit i multipliziert wird. Hierbei ist i eine Zahl, die quadriert -1 ergibt. Bevor ich mich dann mit den verschiedenen Arten, mit komplexen Zahlen zu rechnen, auseinandersetzen konnte, musste ich mir erstmal die Darstellung anschauen. Komplexe Zahlen liegen nämlich außerhalb des Zahlenstrahls und lassen sich in der Gaußschen Zahlenebene darstellen. Das Rechnen mit komplexen Zahlen funktioniert eigentlich so ähnlich wie das Rechnen mit reellen Zahlen, außer man versucht es geometrisch zu zeigen. So werden z.B. bei der Addition beziehungsweise Subtraktion jeweils die Real- und die Imaginärteile getrennt voneinander addiert/ subtrahiert. Bei der Multiplikation und Division werden die komplexen Zahlen auch genauso miteinander multipliziert beziehungsweise dividiert, wie bei reellen Zahlen, nur muss darauf geachtet werden, dass bei der Multiplikation $i^2 = -1$ ist und bei der Division darf nur eine reelle Zahl im Nenner stehen, wenn dies nicht der Fall ist, muss der Bruch so erweitert werden, dass keine imaginäre oder komplexe Zahl mehr dort steht. Beim potenzieren von der imaginären Einheit i treten Regelmäßigkeiten bei den Ergebnissen auf, so lauten die Ergebnisse bei natürlichen Exponenten, beginnend bei i^0 und sich anschließend jeweils um 1 erweiternd $1, i, -i$ und -1 . Bei negativen Exponenten gibt es auch solche Regelmäßigkeiten, sodass die Ergebnisse bei i^{-1} beginnend $-i, -1, i$ und 1 sind. Des Weiteren ist klar geworden, dass man komplexe Zahlen nicht miteinander vergleichen kann, um zu sagen, welche größer oder kleiner ist, dafür kann man aber schauen, welche komplexe Zahl weiter vom Nullpunkt entfernt ist, indem man den Betrag von z berechnet. Alle Zahlen mit dem gleichen Betrag besitzen den gleichen Abstand vom Nullpunkt und liegen auf einem Einheitskreis mit dem Radius $|z|$.

Insgesamt deckt diese Facharbeit aber nur einen kleinen Teil des Themas komplexe Zahlen ab, da das Thema sehr umfangreich ist und somit wird hier nur ein kleiner Einblick beziehungsweise eine kleine Einführung in das Thema geboten. Um sich noch weiterführend mit diesem Thema zu beschäftigen, könnte man noch auf komplexe Funktionen eingehen und sich beispielsweise die Euler'sche Formel sowie auch die Formel von Moivre anschauen oder genaue Anwendungsbeispiele, zum Beispiel aus der Physik, aufgreifen.

10. Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literatur- und Quellenverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

X

Ort/Datum/Unterschrift

X. Literaturverzeichnis

Fritzsche, Klaus: Tutorium Mathematik für Einsteiger; Wuppertal 2016

Königsberger, Konrad: Königsberger Analysis; 6. Auflage 2004

Kusch, Lothar: Mathematik Arithmetik und Algebra; 16. Auflage Berlin 2013

Kusch, Lothar: Mathematik Arithmetik und Algebra Lösungen; 16. Auflage Berlin 2013

Strackenbrock, Birgit: Duden Rechnen und Mathematik; Mannheim 2000

Thaller, Bernd: „Komplexe Zahlen – ein mathematischer Ausflug“, <https://vqm.uni-graz.at/german/complex1.thml> (veröffentlicht am 15. Dezember 2000; aufgerufen am 13. Februar 2021 um 18 Uhr)

Wunderlich-Pfeiffer, Frank: „Quantenmechanik ist wahrscheinlich nicht hyperkomplex“, <https://www.golem.de/news/quantenphysik-quantenmechanik-ist-wahrscheinlich-nicht-hyperkomplex-1705-127607.html> (veröffentlicht am 4. Mai 2017 um 10:36; aufgerufen am 13. Februar 2021 um 18:25 Uhr)

Bildquellen:

<https://www.mathe-online.at/lernpfade/Lernpfad805/?kapitel=3>

<http://mathe-online.fernuni-hagen.de/MIB/HTML/node38.thml>

<https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/#821d>

<https://www.mathe-online.at/mathint/komplex/i.html>